DISCIPLINA: CALCULO B

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Domínio, Imagem e Curvas/Superfícies de Nível

[1] Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o graficamente:

(1.1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-1} + \sqrt{y-x^2}$ (1.2) $f(x,y) = \sqrt{y^2-4}\ \ln(x-y)$

(1.3) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$ (1.4) $f(x,y) = \ln\left[\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\right]$

(1.5) $f(x,y) = \arccos(x-y)$ (1.6) $f(x,y) = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x^2}{4}+y^2\right)$

[2] Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

(2.1) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ (2.2) $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$

(2.3) $f(x,y) = x^2$ (2.4) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

(2.5) $f(x,y) = 8 - 2x - 4y$ (2.6) $f(x,y) = \dfrac{4}{x^2+4y^2}$

(2.7) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$

[3] Descreva as curvas/superfícies de nível da cada função:

(3.1) $f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}$ (3.2) $F(x,y,z) = 2x+3y+6z$

(3.3) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$

Limites, Continuidade e Diferenciabilidade

[4] Determine se o limite existe. Se existir, determine o seu valor:

(4.1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (4.2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$

(4.3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$ (4.4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

(4.5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)}$ (4.6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y^2}$

[5] Defina $f(0,0)$ de maneira que f se estende a uma função contínua na origem:

(5.1) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$ (5.2) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$

[6] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(6.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(6.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

[7] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (2,1) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (2,1) \end{cases}$$

(7.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(7.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(2,1)$.

[8] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

(8.1) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(8.2) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(1,1)$.

Derivadas Parciais de 1ª ordem

[9] Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(9.1) $z = \displaystyle\int_{x^2}^{2y^2} e^{-t^2}\, dt$ (9.2) $z = \operatorname{arcsen}(\sqrt{xy})$ (9.3) $z = e^{y/x} \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$

(9.4) $w = xyz + z \operatorname{sen}(xyz)$ (9.5) $w = \ln(x^2y^3z^4)$ (9.6) $w = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$

[10] Para as funções abaixo calcule, caso exista, as derivadas parciais, nos pontos indicados:

(10.1) $f(x,y) = x \cos\left(\dfrac{x}{y} + \pi\right)$; $P_0(0,1)$

(10.2) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{4x^2 - y^2}$; $P_0(1,1)$

(10.3) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \left(\operatorname{sen}^2 y\right) \operatorname{tg} z$; $P_0(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

(10.4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+2y}{x^2-y} & ;\ \text{se } y \neq x^2 \\ 3 & ;\ \text{se } y = x^2 \end{cases}$; $P_0(1,0)$ e $P_1(1,1)$.

[11] Verificar a identidade proposta para cada função dada:

(11.1) $z = xy^3 - x^3y$; $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^4 - x^4$

(11.2) $w = \ln\,(e^x + e^y + e^z)$; $\quad \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 1$

(11.3) $z = x\ln\,(x^2 + y^2) - 2y \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$; $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + 2x$

(11.4) $z = \dfrac{x-y}{xy}$; $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = -z$

[12] Ligando-se em paralelo n resistências $R_1,\ R_2, \cdots, R_n$, a resistência total R é dada por $\dfrac{1}{R} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}$. Verifique que $\dfrac{\partial R}{\partial R_i} = \left(\dfrac{R}{R_i}\right)^2$.

[13] Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = f(x,y)$. Se $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$ e $f(1,1) = 1$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1)$.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

[14] Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de:

(14.1) $z = x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 2x$

(14.2) $z = x \cos\,(xy) - y \operatorname{sen}\,(xy)$

(14.3) $z = \cos\,(x^3 + xy)$

(14.4) $z = e^{x^2+y^2}$

(14.5) $w = e^{xyz}$

(14.6) $w = x^2y^3z^4$

[15] Provar as identidades:

(15.1) $f(x,t) = \operatorname{sen}\,(ap\ x) \operatorname{sen}\,(p\ t)$; $\quad a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(15.2) $V(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$; $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$; f e g são funções deriváveis.

[16] Uma função f de x e y é harmônica se satisfazem à equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Prove que as funções a seguir são harmônicas:

(16.1) $f(x,y)=e^{-x}\cos(y)$

(16.2) $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$

(16.3) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{y}{x}\Big),\ x>0.$

Regra da Cadeia

[17] Usando a regra da cadeia para $z=f(x,y)$ e $w=f(x,y,z)$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$ e $\dfrac{dw}{dt}$:

(17.1) $z=x^2+2y^2,\ x=\operatorname{sen}(t),\ y=\cos(t)$

(17.2) $z=\operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x}),\ x=\ln(t),\ y=e^t$

(17.3) $w=e^{-x}y^2\operatorname{sen}(z),\ x=t,\ y=2t,\ z=3t$

(17.4) $w=x^2+y^2+z^2,\ x=e^t,\ y=e^t\cos(t),\ z=e^t\operatorname{sen}(t)$

[18] Usando a regra da cadeia para $z=f(x,y)$ e $w=f(x,y,z)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, e $\dfrac{\partial w}{\partial r}$:

(18.1) $z=x^2-y^2,\ x=3t-s,\ y=t+2s$

(18.2) $z=e^{\frac{y}{x}},\ x=2s\cos(t),\ y=4s\operatorname{sen}(t)$

(18.3) $w=xy+yz+zx,\ x=tr,\ y=st,\ z=ts$

(18.4) $w=\ln(xy+yz+zx),\ x=t^2r,\ y=st^2,\ z=t^2s$

[19] Seja $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1)=4$. Seja $g(x,y)=\phi\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$. Calcule:

(19.1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ (19.2) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

[20] Seja $f(x,y)=g\Big(x^2y,x^3y^2\Big)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Sabendo-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)=16$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=8$, calcule as derivadas parciais de g no ponto $(4,8)$.

[21] Considere $f(x,y)=\ln(xy^2)+\operatorname{arctg}(x^2-y)$.

(21.1) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,3)$.

(21.2) Se $x=g(u,v)=uv+2v,\ y=h(u,v),\ h(0,1)=3,\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1)=2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1)=-4$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1)$.

[22] Seja $f(x,y,z) = g\Big(e^{xyz}, x^2y^2z^2\Big)$. Determine o valor da constante β, sabendo-se que

$$\beta x \frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Diferencial Total

[23] Seja $f(x,y) = e^{x-y}$. Usando a diferencial total, calcule o valor de

$$f\Big((\ln 2) + 0.1\ , (\ln 2) + 0.04\Big).$$

[24] Seja $w = (xyz)^{3/2}$.

(24.1) Ache o diferencial de w.

(24.2) Use diferenciais para estimar o erro máximo no valor de w, com um possíveis erros no máximo de $\pm 0,1$ em cada um dos três números x, y e z, se x, y e z são números reais positivos menores ou iguais 4.

[25] Use a diferencial total para encontrar aproximadamente o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, cujos catetos têm como medida 6 cm e 8 cm respectivamente, com um possível erro de $0,1$ cm para cada medida. Encontre também a porcentagem aproximada de erro.

[26] Uma industria vai produzir 10.000 caixas fechadas de papelão, com dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm. O custo do papelão a ser usado é de $\mathbb{R}\$5$ por cm^2. Se as maquinas usadas para cortar os pedaços de papelão têm um possível error de $0,05$ cm em cada dimensão, encontrar aproximadamente, usando diferencial total, o máximo erro possível na estimativa do custo do papelão.

[27] Determinar o maior erro cometido no cálculo da aceleração da gravidade através de um pêndulo cujo período é dado por $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Considerar o comprimento do pêndulo igual a 1 m com um erro admissível de $0,05$ cm e $T = 2$ seg com um erro admissível de $0,01$ seg.

Derivadas Parciais como Taxa de Variação

[28] Um cone tem altura igual a 10 m e o raio 4 m; o crescimento da altura é de $\dfrac{1}{2}$ m/seg e o raio $\dfrac{1}{4}$ m/seg. Qual a velocidade de crescimento do volume do cone?

[29] Determinar a rapidez com que está mudando o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z. Sabe-se que aresta x aumenta 2 cm por segundo, a y diminui 1 cm

por segundo e a z aumenta 2 cm por segundo. No momento considerado $x = 8\ cm,\ y = 10\ cm,\ z = 12\ cm.$

[30] Considere a lei de um gás ideal confinado, $PV = kT$, para $k = 10$. Determine a taxa de variação da temperatura no instante em que o volume do gás é de 120 cm^3 e o gas está sob pressão de 8 N/cm^2, sabendo que o volume cresce à razão de 2 cm^3/seg e a pressão decresce à razão de $0,1\ N/cm^2$.

[31] Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6 cm e cresce à taxa de 1 cm/seg e o comprimento do outro lado é 10 cm e decresce à taxa de 2 cm/seg. Encontre a taxa de variação da área do retângulo, no dado instante.

[32] Em um dado instante, o comprimento de cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e cresce à razão de 1 cm/min e o comprimento do outro é 12 cm e decresce à razão de 2 cm/min. Encontre a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao cateto de 12 cm de comprimento, no dado instante.

Diferenciação Implícita

[33] Suponha que $z = f(x, y)$ é definida implicitamente como uma função de x e y pela equação $x^{2/3} + 2y^{2/3} + 3z^{2/3} = 1$, onde $x, y,$ e z sao números reais positivas. Usando derivação implícita, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

[34] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $xyz = \cos(x+y+z)$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0, \pi/4, \pi/4)$.

[35] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2 z = 1$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2, 0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2, 0)$.

Plano Tangentes, Reta Tangentes e Normais

[36] Encontre a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

(36.1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em $P = (1, 1, 1)$

(36.2) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1, 0, 3)$

(36.3) $\cos(xy) + \text{sen}(yz) = 0$ em $P = (1, \pi/6, -2)$

(36.4) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para $x = y = 2$

(36.5) $g(x, y) = x^y$ em $(1, 1, 1)$

[37] Determine o plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$.

[38] Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

[39] Ache os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x = 0$ para os quais os planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

[40] Ache um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

(40.1) $x^2 + y^2 = 2,\ P_0(1,1)$ (40.2) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4,\ P_0(1/2,1)$

[41] Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

(41.1) $xz + 2x + 4z = 5$ e $4xy + 3y + 6z = 56$, no ponto $(2,5,1/6)$.

(41.2) $x^2 - 2xz + y^2z = 1$ e $3xy + 2yz = -6$, no ponto $(1,-2,0)$.

Derivada direcional e gradiente

[42] Calcule o gradiente das seguintes funções:

(42.1) $z = 2x^2 + 5y^2$ (42.2) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(42.3) $w = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ (42.4) $w = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz)$

(42.5) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ (42.6) $w = e^z \cos(2x)\cos(3y)$

[43] Determine a derivada direcional da função dada na direção $\vec{v}$:

(43.1) $z = 2x^2 + 5y^2,\ \vec{v} = (\cos(\frac{\pi}{2}),\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))$

(43.2) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2},\ \vec{v} = (1,1)$

(43.3) $z = y^2 \operatorname{tg}^2(x),\ \vec{v} = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3},1)$

(43.4) $w = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz),\ \vec{v} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

(43.5) $w = \ln(x^2+y^2+z^2),\ \vec{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,-1)$

(43.6) $w = e^{1+x^2+y^2+z^2},\ \vec{v} = (1,0,1)$

[44] Determine o valor máximo da derivada direcional da função f no ponto dado e a direção em que ocorre:

(44.1) $z = 2x^2 + 3y^2,\ P = (1,-1)$

(44.2) $z = e^{2y} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{3x}\right),\ P = (1,3)$

(44.3) $w = \cos(yz) + \operatorname{sen}(xy),\ P = (-3,0,7)$

(44.4) $w = 2xyz + y^2 + z^2,\ P = (1,1,1)$

[45] Suponha que numa certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

(45.1) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,1,-1)$.

(45.2) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(45.3) Qual a taxa máxima de variação em P?

[46] Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, a distância está em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$.

(46.1) Qual é a direção da parte que tem inclinação mais acentuda?

(46.2) Se o alpinista se mover na direção leste ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(46.3) Se o alpinista se mover na direção sudoeste, ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(46.4) Em qual direção ele estará percorrendo um caminho plano?

[47] Uma chapa de metal aquecida em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em $P(3,4)$ é $100°$, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

Pontos Críticos

[48] Determine e classifique os pontos críticos de:

(48.1) $z = e^{1+x^2+y^2}$

(48.2) $z = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

(48.3) $z = (x^2-1)(y^2-4)$

(48.4) $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{64}{y} + xy$

(48.5) $z = \dfrac{2x+2y+1}{x^2+y^2+1}$

(48.6) $z = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

(48.7) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$

(48.8) $z = \log_4(xyz)$

[49] Determine a distância mínima entre $4x^2 + 4y - z = 0$ e o ponto $(0,0,8)$.

[50] Determine as dimensões do retângulo de menor perímetro e de área 16 cm^2.

[51] Uma aplicação num doente de x miligramas de um remédio A e y miligramas de um medicamento B ocasiona uma resposta $R = R(x,y) = x^2y^3(c-x-y)$, $(c>0)$. Que quantidade de cada remédio dará a melhor resposta?

[52] O custo do material utilizado na fabricação de uma caixa retangular sem tampa, deve ser $\mathbb{R}\$10,00$. Se o material para o fundo da caixa custa 15 centavos por centímetro quadrado e o material para os lados custa 30 centavos por centímetro quadrado, encontre as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser fabricada.

Multiplicadores de Lagrange

[53] Determine os pontos extremos de:

(53.1) $z = 25 - x^2 - y^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(53.2) $z = x^2 + 2xy + y^2$ tais que $x - y = 3$.

(53.3) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ tais que $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

(53.4) $w = x^2 + y^2 + z^2$ tais que $3x - 2y - 4 = 0$.

(53.5) $w = x + y + z$ tais que $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

[54] De todos os triângulos de perímetro fixo, determine o de maior área.

[55] Determine o ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e o ponto Q na reta $x + y = 4$ tal que a distância de P a Q seja a menor possível.

[56] Suponha que a temperatura de um ponto (x, y, z) é dado por $x + 2y + 3z$. Determine as temperaturas extremas (maxima e minima) na esfera de raio 1 centrado na origin, e ache os pontos onde estas temperaturas extremas são atingidas.

[57] Mostre que o volume do maior paralelepípedo retangular que pode ser inscrito num elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é $\dfrac{8abc}{3\sqrt[3]{3}}$.

[58] Mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixo é igual 1 é $\dfrac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

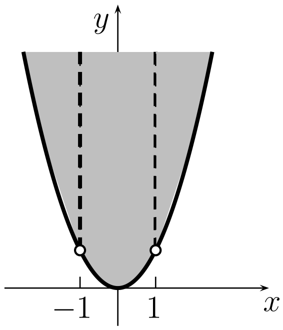
[59] Determine os pontos na superfície $xyz = 1$ que são proximo à origem.

[60] Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de $32m^3$. Encontre as dimensões da caixa que tem a menor área superficial.

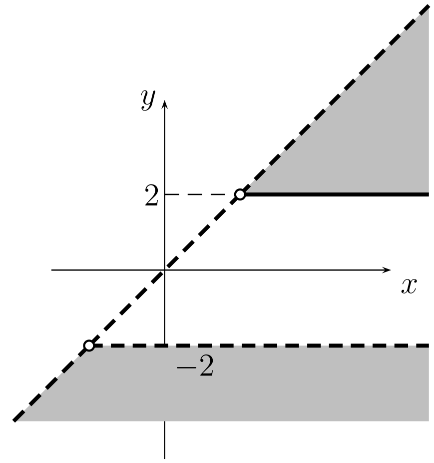
Respostas

[1]

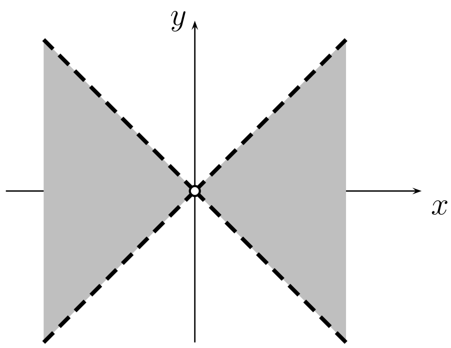
(1.1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2-1 \neq 0 \text{ e } y \geq x^2\}$



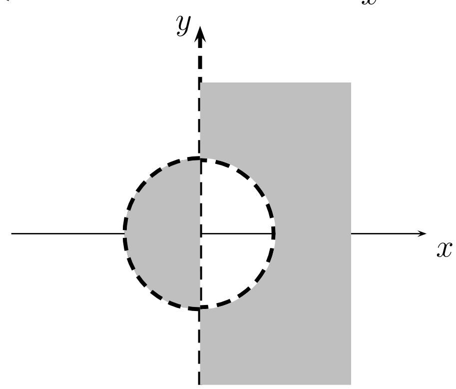
(1.2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2 \text{ ou } y \leq -2 \text{ e } x > y\}$



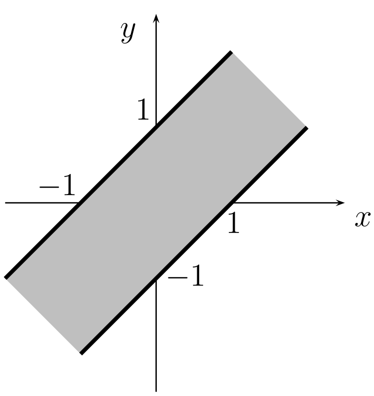
(1.3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 > 0\}$



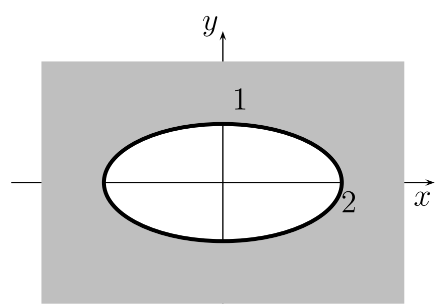
(1.4) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0 \text{ e } \dfrac{x^2+y^2-1}{x} > 0\right\}$



(1.5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x - y \leq 1\}$



(1.6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq -1 \text{ ou } \dfrac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\}$



[3]

$$(3.1)\begin{cases} k<0, \text{ curvas de nível é vazio} \\ 0<k<1, \text{ curvas de nível são elipses de semi eixos } \dfrac{\sqrt{-\ln k}}{2} \text{ e } \sqrt{-\ln k} \\ k=1, \text{ cuvras de nível é o ponto } (0,0) \\ k>1, \text{ curvas de nível é vazio} \end{cases}$$

$$(3.2)\begin{cases} \text{Para } w=k,\ 2x+3y+6z=k, \text{ representa uma família de planos paralelos} \\ \text{de normal } (2,3,6), \text{ para qualquer } k. \end{cases}$$

$$(3.3)\begin{cases} k<0,\ x^2-y^2+z^2=k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 2 folhas} \\ k=0,\ x^2-y^2+z^2=0, \text{ superfícies de nível são cones circular} \\ k>0,\ x^2-y^2+z^2=k, \text{ superfícies de nível são hiperbolóides de 1 folha} \end{cases}$$

[4] $\Big\{$ (4.1) não existe (4.2) 0 (4.3) $\dfrac{\pi}{2}$ (4.4) 1 (4.5) 4 (4.6) não existe

[5] $\Big\{$ (5.1) $f(0,0)=\ln 3$ (5.2) $f(0,0)=0$

[6] $\Big\{$ (6.1) f é contínua em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (6.2) f não é diferenciável em $(0,0)$.

[7] $\Big\{$ (7.1) f é contínua em $\mathbb{R}^2$. (7.2) f não é diferenciável em $(2,1)$.

[8] $\Big\{$ (8.1) f é contínua em $\mathbb{R}^2-\{(1,1)\}$ (8.2) f não é diferenciável em $(1,1)$.

[9]

$$(9.1)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-2xe^{-x^4} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4ye^{-4y^4} \end{cases}$$

$$(9.2)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x-x^2y}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y-xy^2}} \end{cases}$$

$$(9.3)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\Big[\dfrac{-y}{x^2}\ln\big(\dfrac{x^2}{y^2}\big)+\dfrac{2}{x}\Big]e^{y/x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\Big[\dfrac{1}{x}\ln\big(\dfrac{x^2}{y^2}\big)-\dfrac{1}{y}\Big]e^{y/x} \end{cases}$$

$$(9.4)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=yz+yz^2\cos(xyz) \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=xz+xz^2\cos(xyz) \\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=xy+\operatorname{sen}(xyz)+xyz\cos(xyz) \end{cases}$$

$$(9.5)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=2/x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=3/y \\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=4/z \end{cases}$$

$$(9.6)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{-x^2+y^2+z^2-2x(y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2+z^2-2y(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2-z^2-2z(x+y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{cases}$$

[10]

$$\begin{cases} (10.1)\ f_x(P_0) = -1,\ f_y(P_0) = 0 & (10.2)\ f_x(P_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ f_y(P_0) = \dfrac{-\sqrt{3}}{12} \\ (10.3)\ f_x(P_0) = \dfrac{1}{4},\ f_y(P_0) = 1,\ f_z(P_0) = 1 & (10.4)\ f_x(P_0) = 0,\ f_y(P_0) = 5, \nexists f_x(P_1), \nexists f_y(P_1) \end{cases}$$

[13] 17

[14]

$$(14.1) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 4y^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 8xy - 5 \end{cases}$$

$$(14.2) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x} = (y^3 - 2y) \text{ sen } (xy) - xy^2 \cos (xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y} = x^2 y \text{ sen } (xy) - (x^3 + 2x) \cos (xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (xy^2 - 2x) \text{ sen } (xy) - (x^2 y + 2y) \cos (xy) \end{cases}$$

$$(14.3) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x \text{ sen } (x^3 + xy) - (3x^2 + y)^2 \cos (x^3 + xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos (x^3 + xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \text{ sen } (x^3 + xy) - x(3x^2 + y) \cos (x^3 + xy) \end{cases} \qquad (14.4) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2 + 4x^2) e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2 + 4y^2) e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(14.5) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y^2 z^2 e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^2 z^2 e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = x^2 y^2 e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (z + xyz^2) e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = (y + xy^2 z) e^{xyz} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = (x + x^2 yz) e^{xyz} \end{cases} \qquad (14.6) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2y^3 z^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x^2 y z^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 12x^2 y^3 z^2 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 6xy^2 z^4 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 8xy^3 z^3 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 12x^2 y^2 z^3 \end{cases}$$

[17]

$$\begin{cases} (17.1)\ -2 \text{ sen } t \cos t & (17.2)\ \dfrac{e^t(-1 + t \ln t)}{t[e^{2t} + (\ln t)^2]} \\ (17.3)\ e^{-t}[-4t^2 \text{ sen } (3t) + 8t \text{ sen } (3t) + 12t^2 \cos (3t)] & (17.4)\ 4e^{2t} \end{cases}$$

[18]

$$(18.1)\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}=16t-10s\\ \dfrac{\partial z}{\partial s}=-10t-6s\end{cases}\qquad (18.2)\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}=2\sec^2 t.e^{2\,\mathrm{tg}\, t}\\ \dfrac{\partial z}{\partial s}=0\end{cases}$$

$$(18.3)\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=2st(2r+s)\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}=2t^2(r+s)\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}=2st^2\end{cases}\qquad (18.4)\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{4}{t}\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}=\dfrac{2(r+s)}{s(2r+s)}\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}=\dfrac{2}{2r+s}\end{cases}$$

[19] $\{$ (19.1) 4 (19.2) -4

[20] $\left\{ \dfrac{\partial g}{\partial u}(4,8)=10 \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial g}{\partial v}(4,8)=-2\right.$

[21] $\left\{ (21.1)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,3)=2 \qquad (21.2)\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)=\dfrac{17}{6} \text{ e } \dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1)=-54\right.$

[22] $\beta=2$ [23] $1,06$

[24] $\left\{ (24.1)\ dw=\dfrac{3}{2}\Big[x^{1/2}(yz)^{3/2}\ dx+y^{1/2}(xz)^{3/2}\ dy+z^{1/2}(xy)^{3/2}\ dz\Big] \qquad (24.2)\ |dw|\le 57,6\right.$

[25] $0,7$cm; $0,29\%$ [26] $\mathbb{R}\$1200$ [27] $1,05\pi^2$

[28] $\dfrac{28\pi}{3}\ m^3/seg$ [29] $304cm^2/seg$ [30] $0,4^\circ/seg$ [31] $-2\ cm^2/seg$ [32] $\dfrac{-8}{61}\ rad/min$

[33] $\dfrac{-z^{1/3}}{3x^{1/3}}$ [34] $\dfrac{-\pi^2}{16}-1$ [35] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0)=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0)=\dfrac{-1}{\ln 2}$

[36]

$$(36.1)\begin{cases}x+2y+3z=6\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{6}\end{cases}\qquad (36.2)\begin{cases}6x+3y+2z=18\\ x-1=2y-4=3z-9\end{cases}$$

$$(36.3)\begin{cases}\pi x+18y-\pi z=6\pi\\ \dfrac{x-1}{\pi}=\dfrac{y-\frac{\pi}{6}}{18}=-\dfrac{z+2}{\pi}\end{cases}\qquad (36.4)\begin{cases}z=8\\ (x,y,z)=(2,2,0)+t(0,0,1);\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$(36.5)\begin{cases}z-x=0\\ (x,y,z)=(1,1,1)+t(1,0,-1);\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

[37] $x+6y-2z-3=0$ [38] $x+4y+6z=21$ e $x+4y+6z=-21$

[39] $\{$
Não existe tangente à superfície paralelo ao plano $z=0$.
Os planos tangentes à superfície nos pontos $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$ são paralelos ao plano $y=0$
Os planos tangentes à superfície nos pontos $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$ são paralelos ao plano $x=0$

[40] $\begin{cases} (40.1)\ 2\vec{i}+2\vec{j};\ x+y-2=0 \\ (40.2)\ 4\vec{i}+\vec{j};\ 4x+y-3=0 \end{cases}$ [41] $\begin{cases} (41.1)\ \Big(-66, 107, \dfrac{143}{6}\Big) \\ (41.2)\ (6,4,-6) \end{cases}$

[42]

$$\begin{cases} (42.1)\ 2(5x,\ 5y) \qquad (42.2)\ \dfrac{-2}{(x^2+y^2)^2}\Big(x,\ y\Big) \qquad (42.3)\ 2(3x,\ y,\ -4z) \\ (42.4)\ \Big(-y \text{ sen } (xy),\ -x \text{ sen } (xy)+z\cos(yz),\ y\cos(yz)\Big) \\ (42.5)\ \Big(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Big) \\ (42.6)\ e^z\Big(-2 \text{ sen } (2x)\cos(3y),\ -3\cos(2x) \text{ sen } (3y),\ \cos(2x)\cos(3y)\Big) \end{cases}$$

[43]

$$\begin{cases} (43.1)\ 10y^2 \qquad (43.2)\ \dfrac{-2\sqrt{2}(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \\ (43.3)\ -y \text{ tg } x(\sqrt{3}y \sec^2 x - \text{ tg } x) \qquad (43.4)\ \dfrac{1}{3}\Big[(y-2x) \text{ sen } (xy)+(2z+2y)\cos(yz)\Big] \\ (43.5)\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\dfrac{x-y-z}{x^2+y^2+z^2}\Big] \qquad (43.6)\ \sqrt{2}(x+z)e^{1+x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

[44]

$$\begin{cases} (44.1)\ 2\sqrt{13},\ \vec{v}=(4,-6) \qquad (44.2)\ \dfrac{e^6}{6}\sqrt{9\pi^2+6\pi+10},\ \vec{v}=\dfrac{e^6}{6}(3,3\pi+1) \\ (44.3)\ 3,\ \vec{v}=(0,-3,0) \qquad (44.4)\ 6,\ \vec{v}=(2,4,4) \end{cases}$$

[45]

$$\Big\{\ (45.1)\ \dfrac{32}{\sqrt{3}} \qquad (45.2)\ (38,6,12) \qquad (45.3)\ 2\sqrt{406}$$

[46]

$$\begin{cases} (46.1)\ \Big(\dfrac{3}{\sqrt{10}},-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big) \qquad (46.2)\ \text{subindo a 60 m por m} \\ (46.3)\ \text{descendo a } 20\sqrt{2} \text{ m por m} \qquad (46.4)\ \Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big) \text{ ou } \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big) \end{cases}$$

[47] $-\dfrac{28}{\sqrt{2}};\ (-12,-16);\ \lambda(4\vec{i}-3\vec{j});\ \lambda\neq 0$

[48]

$$\begin{cases} (48.1)\ (0,0) \text{ ponto min} \qquad (48.2)\ \Big(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\Big) \text{ ponto max} \\ (48.3)\ (0,0) \text{ max };(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2) \text{ selas} \qquad (48.4)\ \Big(-\dfrac{1}{4},16\Big) \text{ ponto max.} \\ (48.5)\ (-1,-1) \text{ ponto min};(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \text{ ponto max} \qquad (48.6)\ \Big((2n+1)\pi,(2n+1\pi)\Big),\ n\in\mathbb{Z} \\ (48.7)\ (1,2) \text{ ponto min.} \qquad (48.8) \text{ não existe pontos criticos} \end{cases}$$

[49] 8 [50] $4cm$ por $4cm$ [51] $\dfrac{c}{2}$ de A, $\dfrac{c}{3}$ de B [52] $4a$

[53]

$$\begin{cases} (53.1)\ (0,0),\ (0,4) \qquad (53.2)\ \Big(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\Big) \\ (53.3)\ (0,0) \qquad (53.4)\ \Big(\dfrac{12}{13},-\dfrac{8}{13},0\Big) \\ (53.5)\ (2,-2,2) \end{cases}$$

[41] Triângulo eqüilatero [40] $P(2,1),\ Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

[56] $T_{max}=\sqrt{14}$ em $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $T_{min}=-\sqrt{14}$ em $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

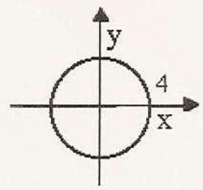
[59] $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$ [60] 4cm por 4cm por 2cm

2) a)

$D(f) = R^2$

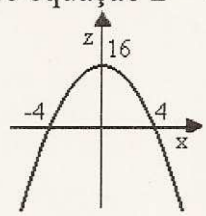
$G(f) \cap XoY$:

círculo de equação $x^2 + y^2 = 16$



$G(f) \cap XoZ$:

Parábola de equação $z = 16 - x^2$



$G(f) \cap YoZ$:

Parábola de equação $z = 16 - y^2$

Curvas de nível

Para $z = k$,

$k < 16$: círculo de equação $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{16-k}\right)^2$

$k = 16$: ponto $(0,0)$

$k > 16$: $\varnothing$

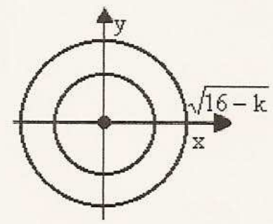
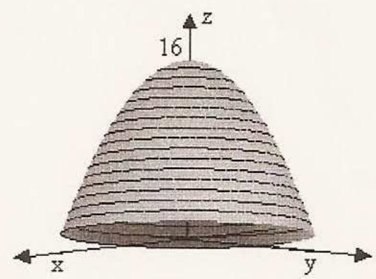


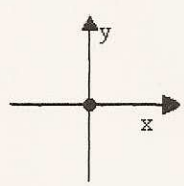
Gráfico: (um parabolóide de revolução)



2) b)

$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY$: ponto $(0,0)$



$G(f) \cap XoZ$:

Parábola de equação $z = 9x^2$

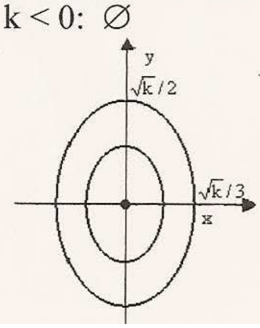
Curvas de nível

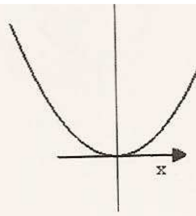
Para $z = k$,

$k > 0$: elípse de equação $\dfrac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1$

$k = 0$: ponto $(0,0)$

$k < 0$: $\varnothing$





G(f) $\cap$ YoZ:
Parábola de equação $z = 4y^2$

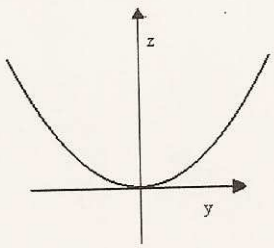
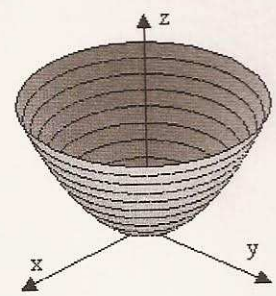
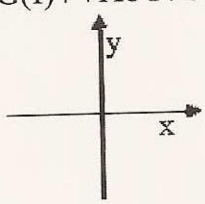


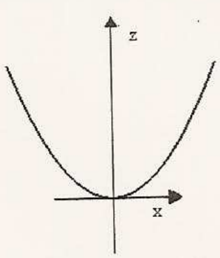
Gráfico:



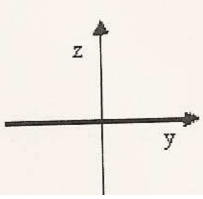
2) c)
$D(f) = R^2$
G(f) $\cap$ XoY: o eixo OY



G(f) $\cap$ XoZ:
Parábola de equação $z = x^2$



G(f) $\cap$ YoZ: o eixo OY



Curvas de nível
Para $z = k$,
$k > 0$: as retas $x = \sqrt{k}$ e $x = -\sqrt{k}$
$k = 0$: o eixo OY
$k < 0$: $\varnothing$

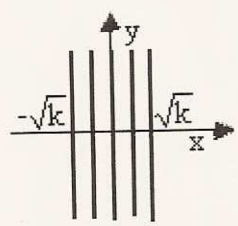
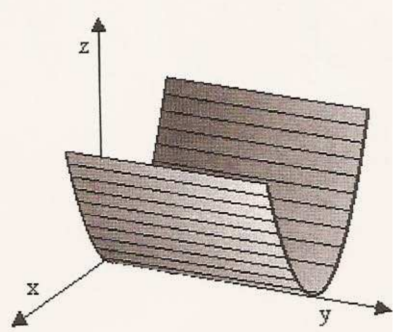
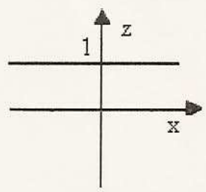


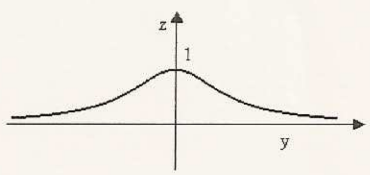
Gráfico: (uma superfície cilíndrica)



2) d)
$D(f) = R^2$
$G(f) \cap XoY$: $\varnothing$
$G(f) \cap XoZ$: a reta $z = 1$



$G(f) \cap YoZ$: a curva $z = 1/(1 + y^2)$



Curvas de nível
Para $z = k$,
$0 < k < 1$: as retas $y = \sqrt{1/k - 1}$ e $y = -\sqrt{1/k - 1}$
$k = 1$: o eixo OX
$k > 1$ ou $k \leq 0$: $\varnothing$

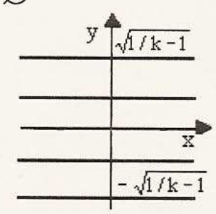
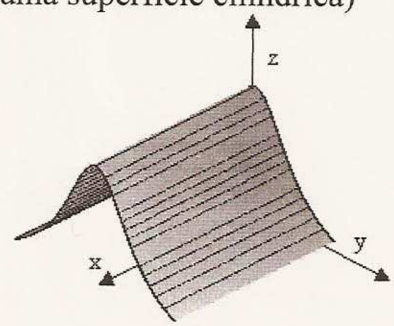
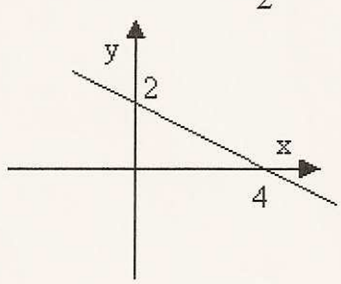


Gráfico: (uma superfície cilíndrica)

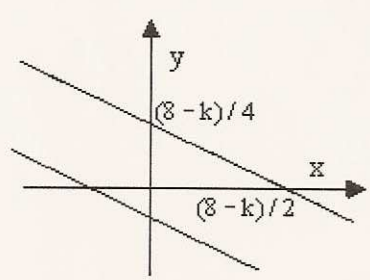


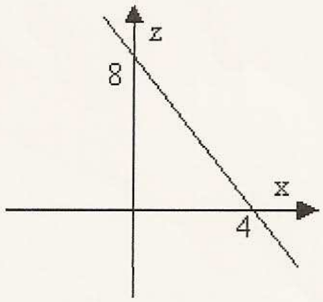
2) e)
$D(f) = R^2$
$G(f) \cap XoY$: a reta $y = -\dfrac{x}{2} + 2$



$G(f) \cap XoZ$: a reta $z = -2x + 8$

Curvas de nível
Para $z = k$,
$\forall\, k \in R$: a reta $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{8-k}{4}$





G(f) $\cap$ YoZ: a reta $z = -4y + 8$

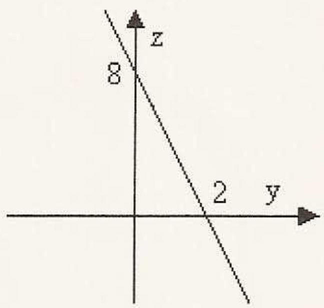
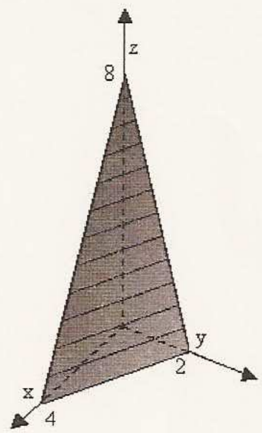


Gráfico: (um plano)

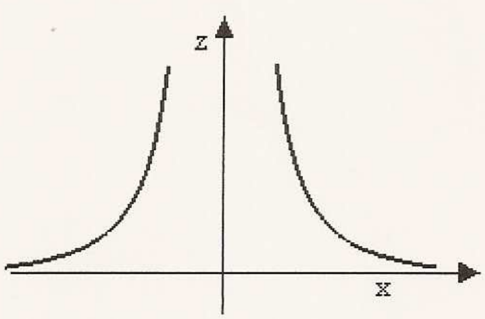


2) f)

$D(f) = R^2 - \{(0,0)\}$

G(f) $\cap$ XoY: $\varnothing$

G(f) $\cap$ XoZ: a curva $z = 4/x^2$



G(f) $\cap$ YoZ: a curva $z = 1/y^2$

Curvas de nível

Para $z = k$,

$k > 0$: elípse de equação $\dfrac{x^2}{(2/\sqrt{k})^2} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{k})^2} = 1$

$k \leq 0$: $\varnothing$

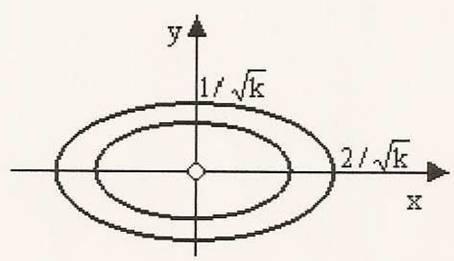
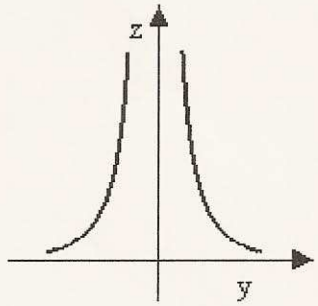
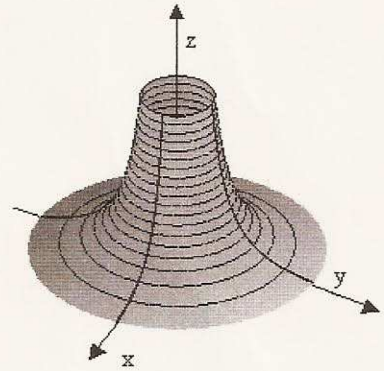


Gráfico:



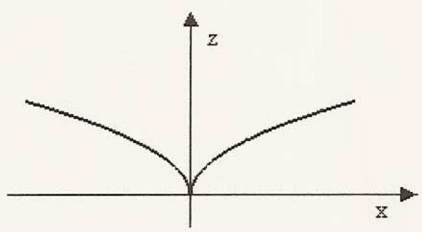


2) g) $f(x,y)=\sqrt[4]{x^2+y^2}$

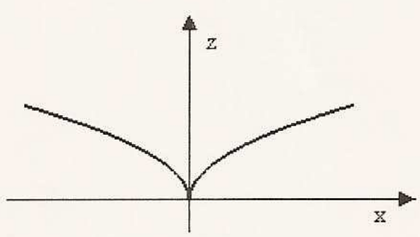
$D(f) = R^2$

$G(f) \cap XoY$: o ponto (0,0)

$G(f) \cap XoZ$: a curva $z = \sqrt{|x|}$



$G(f) \cap YoZ$: : a curva $z = \sqrt{|y|}$



Curvas de nível

Para $z = k$,

$k > 0$: circulo de equação $x^2 + y^2 = (k^2)^2$

$k = 0$: o ponto (0,0)

$k < 0$: $\varnothing$

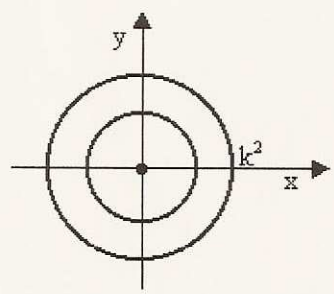


Gráfico: (uma superfície de revolução)